Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БелорусскиЙ государственный университет

информатики и радиоэлектроники

Факультет информационных технологий и управления

Кафедра информационных технологий автоматизированных систем

Дисциплина: Системный анализ и исследование операций

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

Пояснительная записка

к курсовому проекту

на тему

**РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

БГУИР КП 1-53 01 02 01 039 ПЗ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент |  | В. В. Шумигай |
| Руководитель |  | Е. В. Протченко |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Минск 2022

**РЕФЕРАТ**

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ: курсовой проект / В. В. Шумигай – Минск : БГУИР, 2022, – п.з. – 29 с.

Курсовой проект на тему «Решение оптимизационных задач линейного программирования» реализован с целью определения оптимального плана работы мебельной фабрики при соблюдении всех ограничений и получения максимальной прибыли.

Пояснительная записка к курсовому проекту состоит из введения, 6 разделов, включающих постановку задачи оптимизации, построение базовой аналитической модели, обоснование вычислительной процедуры, решение задачи оптимизации на основе симплекс-метода, анализ модели на чувствительность, построение модифицированной модели и анализ результатов модификации, а также заключения, списка использованных источников и приложений, содержащих рабочие листы *Excel* с результатами решения задачи на основе базовой аналитической модели и задачи на основе модифицированной аналитической модели.

Для решения оптимизационных задач используется симплекс-метод.

В результате выполнения курсового проекта разработан оптимальный план работы мебельной фабрики для получения максимальной прибыли при соблюдении всех ограничений. Произведен анализ оптимального решения на чувствительность, представлен возможный вариант модификации модели с целью улучшения полученных результатов и устранения недостатков, выявленных в результате решения поставленной задачи оптимизации.

Дополнительно, исходная и модифицированная задачи решаются с использованием надстройка «Поиск решения» табличного процессора *Excel*.

Данный курсовой проект может служить хорошим примером решения оптимизационных задач и использоваться для обучения решения аналогичных задач линейного программирования.

Учреждение образования

«Белорусский государственный университет информатики   
и радиоэлектроники»

Факультет информационных технологий и управления

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

(подпись)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2022г.

ЗАДАНИЕ

по курсовому проектированию

Студенту *Шумигай Владиславу Викторовичу \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Тема проекта Разработка оптимального плана работы мебельной фабрики

2. Срок сдачи студентом законченного проекта\_\_\_\_\_\_*10 декабря 2022 г.\_\_\_\_\_*

3. Исходные данные к проекту Из одного города в другой ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. Количество выгонов каждого типа, входящих в состав поездов, приведено в таблице.

Вместимость плацкартного вагона – 58 пассажиров, купейного – 40, мягкого – 32. Багажные и почтовые вагоны не используются для перевозки пассажиров.

Всего имеется 12 багажных вагонов, 8 почтовых, 81 плацкартный, 70 купейных, 26 мягких.

Требуется по меньшей мере один скорый поезд.

Определить количество скорых и пассажирских поездов, которые необходимо формировать ежедневно, чтобы перевезти максимальное количество пассажиров.

4. Содержание расчетно-пояснительной записки (перечень вопросов, которые подлежат разработке)

*Введение\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*1 Постановка задачи оптимизации \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*2* *Построение базовой аналитической модели \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*3* *Обоснование вычислительной процедуры \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*4 Решение задачи оптимизации \_*

*5 Анализ базовой аналитической модели на чувствительность \_*

*6 Построение модифицированной аналитической модели и анализ результатов модификации \_*

*7 Примеры постановок и решения оптимизационных задач \_*

*Заключение \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*Список использованных источников\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_*

5. Консультант по проекту (с обозначением разделов проекта)  *Е. В. Протченко*

6. Дата выдачи задания \_\_\_\_\_\_\_*1 сентября 2022 г.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

7. Календарный график работы над проектом на весь период проектирования (с обозначением сроков выполнения и трудоемкости отдельных этапов):

*1-3 разделы к 8.10 – 35 %; \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*4, 5 разделы к 5.11 – 35 %;\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*6, 7 разделы к 3.12 – 10 %;\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*оформление пояснительной записки к 10. 12 – 20 %;\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*защита курсового проекта с 13.12 по 21.12.2022г\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

Руководитель*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Е. В. Протченко*

(подпись)

Задание принял к исполнению *\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_В. В. Шумигай*

(дата и подпись студента)

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 6](#_Toc119081303)

[1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ 8](#_Toc119081304)

[2 ПОСТРОЕНИЕ БАЗОВОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ 9](#_Toc119081305)

[3 ОБОСНОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ 11](#_Toc119081306)

[4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ 12](#_Toc119081307)

[5 АНАЛИЗ БАЗОВОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ 17](#_Toc119081308)

[5.1 Статус и ценность ресурсов 17](#_Toc119081309)

[5.2 Анализ на чувствительность к изменениям запаса ресурсов 18](#_Toc119081310)

[5.3 Анализ на чувствительность к изменениям прибыли от реализации бюро 21](#_Toc119081311)

[6 ПОСТРОЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДИФИКАЦИИ 23](#_Toc119081312)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 25](#_Toc119081313)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 26](#_Toc119081314)

[ПРИЛОЖЕНИЕ А (обязательное) Рабочий лист *Excel* с результатами решения задачи на основе базовой аналитической модели 27](#_Toc119081315)

[ПРИЛОЖЕНИЕ Б (обязательное) Рабочий лист *Excel* с результатами решения задачи на основе модифицированной аналитической модели 28](#_Toc119081316)

[ВЕДОМОСТЬ КУРСОВОГО ПРОЕКТА 29](#_Toc119081317)

# ВВЕДЕНИЕ

Исследование операций – прикладная математическая дисциплина, рассматривающая количественное обоснование решений по управлению целенаправленными процессами (операциями) в сложных системах. Ее составляющими являются: построение математических моделей принятия наилучших (оптимальных) решений, разработка математических методов получения таких решений для различных типов исходной числовой информации, использование полученных результатов в реальных ситуациях [1].

Наиболее известными и эффективными методами исследования операций являются методы линейного программирования, когда целевая функция и все ограничения являются линейными функциями. Линейное программирование успешно применяется в экономике, индустрии, сельском хозяйстве, транспортной отрасли, системе здравоохранения, военной области и даже в социальных науках [2].

Задачи линейного программирования со множеством переменных решаются с помощью симплекс-метода. Итоговая таблица алгоритма симплекс-метода содержит оптимальное значение целевой функции, соответствующие ему значения переменных решения и значения остаточных или избыточных переменных [3].

Оптимальное решение задачи линейного программирования дает возможность для принятия хорошего управленческого решения. Однако следует учитывать, что все числовые параметры в изучаемой математической модели известны и постоянны. Как правило, в практических задачах этого не бывает. Во-первых, эти параметры могут быть неточными, и, во-вторых, в зависимости от условий хозяйствования они могут изменяться с течением времени. Исследование изменений оптимального решения задачи в зависимости от изменения данных называется анализом чувствительности или постоптимальным анализом. Такой анализ часто решает проблему стабильности оптимального решения, в котором определяются пределы изменений параметров задачи, не приводящих к изменениям в оптимальном решении.

Итоговую таблицу симплекс-метода можно использовать также в анализе чувствительности, чтобы выявить общее воздействие изменений в запасах лимитирующих ресурсов на целевую функцию и каждое ограничение.

Табличный процессор *Excel* имеет развитые средства, позволяющие решать разнообразные задачи оптимизации, в том числе задачи линейного программирования. Надстройка «Поиск решения», входящая в *Excel*, предназначена для оптимизации моделей при наличии ограничений. Для задач линейного программирования «Поиск решения» использует эффективный оптимизационный алгоритм под названием симплекс-метод [4].

Целью курсового проекта является определение оптимального плана работы мебельной фабрики. Фабрика выпускает стулья, столы, шкафы и бюро. При этом использует в качестве материала обычные и пропитанные доски. Существуют ограничения на количество обычных и пропитанных досок. Поэтому в данном проекте определяется, сколько мебели каждого типа следует выпустить, чтобы соблюдались все ограничения, и фабрика получила максимальную прибыль.

Поставленная оптимизационная задача решается симплекс-методом, интерпретируются полученные результаты, указываются статус и ценность рассматриваемых в задаче ресурсов, выполняется анализ на чувствительность к изменениям ограничений и коэффициентов целевой функции, указываются недостатки объекта моделирования, выявленные в результате решения задачи оптимизации, и приводятся предложения по их устранению, разрабатывается модифицированная модель, соответствующая улучшенному варианту объекта моделирования, и производится оценка достигнутых результатов.

Дополнительно, исходная задача и модифицированная задача решаются с использованием табличного процессора *Excel* и приводятся результаты решения с объяснением их смысла.

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и шкафы. При изготовлении этих изделий используются два типа досок: обычные и пропитанные специальным составом для придания долговечности. Еженедельно фабрика может закупать не более 1500 м обычных досок и не более 1000 м пропитанных досок. Расход досок на изготовление одного изделия приведен в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Расход досок на изготовление изделия

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Доски | Расход досок на одно изделие, м | | | |
| стол | стул | бюро | шкаф |
| Обычные | 7 | 2 | 8 | 10 |
| Пропитанные | 1 | 1 | 3 | 2 |

Трудозатраты на выпуск одного стола или бюро в 4 раза, а одного шкафа -

в 8 раз превышают трудозатраты на выпуск одного стула. Численность рабочих

фабрики позволяет выпускать 800 стульев в неделю (если выпускать только стулья).

По заказу фабрика должна выпускать не менее 10 бюро в неделю.

Прибыль фабрики от выпуска одного стола, стула, бюро и шкафа составляет соответственно 15, 8, 17 и 10 ден.ед.

Составить план производства мебели, обеспечивающий фабрике максимальную прибыль.

# ПОСТРОЕНИЕ БАЗОВОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В данной задаче необходимо определить план производства мебели. В задаче требуется максимизировать прибыль и минимизировать затраты.

Составим аналитическую модель. Для этого введем переменные:

*Х*1 – количество изготовленных столов;

*Х*2 – количество изготовленных стульев;

*Х*3 – количество изготовленных бюро;

*Х*4 – количество изготовленных шкафов.

В данной задаче имеются ограничения на расход ресурсов. Так еженедельно фабрика может закупать не более 1500 м обычных досок и не более 1000 м пропитанных досок. Расход досок на изготовление одного изделия приведен в таблице.

Поэтому можно записать следующее ограничение на расход обычных досок:

Аналогично можно составить ограничение на расход пропитанных досок:

Также есть ограничение: на выпуск бюро – фабрика должна выпускать их не меньше 10. Запишем ограничение:

Численность рабочих предприятия позволяет выпустить 800 стульев, если выпускать только их. Следовательно, можно считать, что весь трудовой ресурс предприятия составляет 800 условных единиц. Тогда трудозатраты на изготовление стула – 1. Известно, что трудозатраты на выпуск одного стола или бюро в 4 раза, а одного шкафа - в 8 раз превышают трудозатраты на выпуск одного стула. Так как, затраты трудовых ресурсов не должны превышать 800, мы можем составить ограничение:

Так как по своему физическому смыслу переменные *X*1, *X*2, *X*3, *X*4 обозначают количество изготавливаемой мебели, то данные величины не могут иметь отрицательные и дробные значения. Необходимо ввести ещё ограничения неотрицательности и целочисленности:

В данной задаче необходимо составить план производства мебели, обеспечивающий фабрике максимальную прибыль. Прибыль фабрики от выпуска одного стола, стула, бюро и шкафа составляет соответственно 15, 8, 17 и 10 ден.ед.

Таким образом, общая прибыль составит 15*X*1 + 8*X*2 + 17*X*3 + 10*X*4. Требуется найти такие *X*1, *X*2, *X*3, *X*4, при которых эта величина будет максимальной.

Целевая функция для этой задачи будет иметь следующий вид:

Приведем полную математическую модель данной задачи:

# ОБОСНОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Все ограничения и целевая функция в данной задаче линейны, поэтому для ее решения можно использовать симплекс-метод.

В математической модели задачи имеются ограничения «больше или равно» и «меньше или равно». После приведения задачи к стандартной форме необходимо, чтобы в каждом ограничении присутствовала базисная переменная, т.е. переменная, входящая в ограничение с коэффициентом равным единице, и не входящая ни в одно из других ограничений. В ограничении «меньше или равно» в качестве таких переменных используются остаточные переменные, добавляемые в ограничение при приведении к стандартной форме. Для приведения к стандартной форме ограничений «больше или равно» вводится избыточная переменная со знаком «минус». Поэтому в задачах, имеющих ограничения «больше или равно» после приведения к стандартной форме невозможно построить базис, так как базисные переменные есть не во всех ограничениях. Поэтому для решения задачи потребуется использовать один из методов искусственного базиса. Метод реализуется с помощью введения искусственных переменных в ограничения, где их нет (будем использовать двухэтапный метод) [5].

Все переменные в задаче по своему физическому смыслу должны принимать неотрицательные и целые значения. На переменные *X1, X2, X3, X4* наложены ограничения целочисленности, поэтому, если при решении задачи симплекс-методом одна из них примет дробное значение, то необходимо будет воспользоваться одним из методов целочисленного программирования.

Для большинства методов решения задач линейного программирования требуется предварительно привести задачу к стандартной форме. Задача (или ее математическая модель) представлена в стандартной форме, если она соответствует следующим условиям:

целевая функция подлежит максимизации;

все ограничения имеют вид равенств;

на все переменные накладываются ограничения неотрицательности.

Симплекс-метод позволяет решать задачи линейного программирования любой размерности, т.е. с любым количеством переменных. Решение задач линейного программирования на основе симплекс-метода состоит в целенаправленном переборе угловых точек ОДР в направлении улучшения значения целевой функции.

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Приведем задачу к стандартной форме. Все ограничения требуется преобразовать в равенства. Для этого в ограничения “меньше или равно” необходимо ввести остаточные переменные. В ограничение “больше или равно” добавляется избыточные переменные. Математическая модель задачи в стандартной форме имеет следующий вид:

В полученной системе уравнений нет базисной переменной в четвертом уравнении. Поэтому для решения задачи требуется использовать методы искусственного базиса.

**Первый этап (поиск допустимого решения).**

Во все ограничения, где нет базисных переменных, вводятся искусственные базисные переменные. В данной задаче их требуется ввести в четвертое ограничение. Система ограничений с искусственными базисными переменными будет иметь следующий вид:

Таким образом, начальный базис будет состоять из остаточных переменныx *X*5, *X*6, *X*7, а также искусственной переменной *X*9.

Составляем искусственную целевую функцию - сумму всех искусственных переменных:

Эта целевая функция подлежит минимизации, так как для определения начального допустимого решения необходимо, чтобы все искусственные переменные приняли нулевые значения.

Искусственная целевая функция выражается через небазисные переменные. Для этого сначала требуется выразить искусственную переменную через небазисные переменные:

Выраженная таким образом искусственная переменная подставляется в искусственную целевую функцию:

Для приведения всей задачи к стандартной форме выполняется переход к искусственной целевой функции, подлежащей максимизации. Для этого она умножается на –1:

Приведем полную математическую модель задачи, приведенную к стандартной форме:

Определяется начальное решение. Все исходные, а также избыточные переменные задачи являются небазисными, т.е. принимаются равными нулю. Искусственные, а также остаточные переменные образуют начальный базис: они равны правым частям ограничений. Для рассматриваемой задачи начальное решение следующее: *X*5=1500, *X*6=1000, *X*7=800, *X*9=10, *X*1= *X*2= *X*3= *X*4=*X*8=0. Это решение является недопустимым: значения переменных *X*1= *X*2= *X*3=*X*4=0 не удовлетворяют постановке задачи. Начальное значение целевой функции Е равно нулю. Начальное значение искусственной целевой функции –W = *X*3 – *X*8 - 10 = -10.

Составляется исходная симплекс-таблица. Она отличается от симплекс-таблицы, используемой для обычного симплекс-метода только тем, что в нее добавляется строка искусственной целевой функции. В этой строке указываются коэффициенты искусственной целевой функции (приведенной к стандартной форме, т.е. подлежащей максимизации) с обратными знаками, как и для обычной целевой функции.

Выполняется переход от недопустимого начального решения, содержащегося в исходной симплекс-таблице, к некоторому допустимому решению. Для этого с помощью обычных процедур симплекс-метода выполняется минимизация искусственной целевой функции *W* (или, то же самое, максимизация функции –*W*). При этом переменные, включаемые в базис, выбираются по строке искусственной целевой функции. Все остальные действия выполняются точно так же, как в обычном симплекс-методе. В результате минимизации искусственная целевая функция –*W* должна принять нулевое значение. Все искусственные переменные при этом также становятся равными нулю (исключаются из базиса), так как искусственная целевая функция представляет собой их сумму.

В таблице 4.1 в строке искусственной целевой функции максимальное по модулю отрицательное значение, равное -1. Это коэффициент при переменной X3. Столбец переменной X3 становится ведущим.

Таблица 4.1 – Первая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | *X1* | *X2* | *X3* | *X4* | *X5* | *X6* | *X7* | *X8* | *X9* | Решение |
| *E* | -15 | -8 | -17 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| *-W* | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -10 |
| *X5* | 7 | 2 | 8 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1500 |
| *X6* | 1 | 1 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 |
| *X7* | 0.25 | 1 | 0.25 | 0.125 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 800 |
| *X9* | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 10 |

Для определения переменной, исключаемой из базиса, найдем симплексные отношения, т. е. отношения текущих значений базисных переменных к положительным коэффициентам ведущего столбца, соответствующим данным базисным переменным. (Если в ведущем столбце все элементы отрицательны, то задача не имеет решений (минимум не достигается)): 1500/8=187,5; 1000/3=333,333; 800/0.25=3200; 10/1=10. Минимальное симплексное отношение получено в строке переменной *X*9; значит, эта переменная исключается из базиса. Строка переменной *X*9 становится ведущей. Находим ведущий элемент, он расположен на пересечении ведущей строки и ведущего столбца (в нашем случае он равен 1).

Переменную, которой соответствует ведущий столбец, включим в базис вместо переменной, которой соответствует ведущая строка. Все элементы ведущей строки делятся на ведущий элемент. Все элементы ведущего столбца (кроме ведущего элемента) заменяются нулями. Все остальные элементы таблицы (включая *E*-строку и столбец “Решение”) пересчитываются по “правилу прямоугольника”.

Решение, полученное в таблице 4.2, является допустимым, в базисе нет искусственных переменных. Искусственная целевая функция равна нулю. Получено допустимое решение. Таким образом, первый этап двухэтапного метода завершен. Искусственная целевая функция и искусственные переменные исключаются из симплекс-таблицы.

Таблица 4.2 – Вторая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | *X1* | *X2* | *X3* | *X4* | *X5* | *X6* | *X7* | *X8* | *X9* | Решение |
| *E* | -15 | -8 | 0 | -10 | 0 | 0 | 0 | -17 | 17 | 170 |
| *-W* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| *X5* | 7 | 2 | 0 | 10 | 1 | 0 | 0 | 8 | -8 | 1420 |
| *X6* | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 3 | -3 | 970 |
| *X7* | 0.25 | 1 | 0 | 0.125 | 0 | 0 | 1 | 0.25 | -0.25 | 797.5 |
| *X3* | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 10 |

**Второй этап (поиск допустимого решения)**

Решение, полученное по результатам первого этапа (см. таблицу 4.3), не является оптимальным: в строке целевой функции имеются отрицательные элементы. Поиск оптимального решения выполняется по обычным правилам симплекс-метода. В базис включается переменная *X*8 (у нее максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке целевой функции). Для определения переменной, исключаемой из базиса, найдем симплексные отношения: 1420/8=177.5; 970/3=323.3; 797.5/0.25=797.5. Из базиса исключается переменная *X*5.

Таблица 4.3 – Третья симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | *X1* | *X2* | *X3* | *X4* | *X5* | *X6* | *X7* | *X8* | Решение |
| *E* | -15 | -80 | 0 | -10 | 0 | 0 | 0 | -17 | 170 |
| *X2* | 7 | 2 | 0 | 10 | 1 | 0 | 0 | 80 | 1420 |
| *X6* | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 3 | 970 |
| *X7* | 0.25 | 1 | 0 | 0.125 | 0 | 0 | 1 | 0.25 | 797.5 |
| *X3* | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 10 |

После преобразований по правилам симплекс-метода будет получена новая симплекс-таблица 4.4.

Таблица 4.4 – Четвертая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | *X1* | *X2* | *X3* | *X4* | *X5* | *X6* | *X7* | *X8* | Решение |
| *E* | -0,125 | -3,75 | 0 | 11,25 | 2,125 | 0 | 0 | 0 | 3187,5 |
| *X5* | 0,875 | 0,25 | 0 | 1,25 | 0,125 | 0 | 0 | 1 | 177,5 |
| *X6* | -1,625 | 0,25 | 0 | -1,75 | -0,375 | 1 | 0 | 0 | 437,5 |
| *X7* | 0,03 | 0,94 | 0 | -0,187 | -0,03 | 0 | 1 | 0 | 753,125 |
| *X3* | 0,875 | 0,25 | 1 | 1,25 | 0,125 | 0 | 0 | 0 | 187,5 |

Так как в строке целевой функции есть отрицательный коэффициент, решение не оптимально. Продолжим пересчет таблицы. В базис включается переменная *X*2 (у нее максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке целевой функции). Для определения переменной, исключаемой из базиса, найдем симплексные отношения: 1420/2=710; 970/1=970; 797.5/1=797.5. Из базиса исключается переменная *X*8. После преобразований по правилам симплекс-метода будет получена новая симплекс-таблица 4.5.

Таблица 4.5 – Итоговая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | *X1* | *X2* | *X3* | *X4* | *X5* | *X6* | *X7* | *X8* | Решение |
| *E* | 13 | 0 | 0 | 30 | 4 | 0 | 0 | 15 | 5850 |
| *X*2 | 3,5 | 1 | 0 | 5 | 0,5 | 0 | 0 | 4 | 710 |
| *X*6 | -2,5 | 0 | 0 | -3 | -0,5 | 1 | 0 | -1 | 260 |
| *X*7 | -3.25 | 0 | 0 | -4.87 | -0,5 | 0 | 1 | -3.75 | 87.5 |
| *X*3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 10 |

Получено оптимальное решение (отсутствуют отрицательные элементы в строке целевой функции): *X1=X4=X5=X8=*0*, X2=*710*, X3=*10*, X6=*260*, X7=*87.5, *E*=5850. Это означает, что мебельной фабрике для максимальной прибыли следует изготовить 710 стульев и 10 бюро. При этом фабрика не будет изготавливать столы и шкафы (*Х*1=*Х*4=0). Прибыль составит 5850ден. ед.

Остаточная переменная *Х*5=0 означает, что фабрика израсходует максимально возможное количество обычных досок. Остаточная переменная *Х*6=260 означает, что при изготовлении мебели останется 260 м пропитанных досок. Остаточная переменная *Х*7=87.5 означает, что 87.5 усл. ед. трудового ресурса не будут заняты в производстве.

Избыточная переменная *Х*8=0 означает, что недельный выпуск бюро не превысит минимально необходимую величину (необходимо выпустить не менее 10 изделий).

Таким образом, для реализации оптимального плана выпуска мебели требуется израсходовать 1500 метров обычных и 1000-260=740 метров пропитанных досок.

Рабочий лист с результатами решения задачи с использованием табличного процессора *Excel* приведен в приложении А.

# АНАЛИЗ БАЗОВОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

## Статус и ценность ресурсов

По статусу ресурсы делятся на дефицитные и недефицитные. Если для реализации оптимального решения ресурс расходуется полностью, то он называется дефицитным, если не полностью – недефицитным.

Статус ресурсов определяется по значениям остаточных переменных.

Определим статус ресурсов для нашей задачи. В рассматриваемой задаче ресурсами являются обычные и пропитанные доски и трудовые ресурсы. Обычные доски являются дефицитным ресурсом, т. к. они расходуется полностью. Пропитанные доски недефицитный ресурс, т.к. остаток составляет 260 м. Поэтому увеличение ее запаса нецелесообразно: оно приведет только к увеличению неизрасходованного остатка. Таким образом, пропитанных досок можно закупать на 260 метров меньше; это никак не повлияет на оптимальный план производства мебели. Если запас пропитанных досок снизить более чем на 260 метров (запас составит менее 740 метров), то потребуется заново определять оптимальный план производства мебели; по смыслу задачи, очевидно, что в этом случае прибыль снизится.

Увеличение запасов дефицитных ресурсов позволяет увеличить целевую функцию (прибыль). Снижение запасов дефицитных ресурсов приводит к снижению прибыли. Для нашей задачи увеличение запасов обычных досок позволит увеличить прибыль.

Проанализируем значение остаточной переменной *Х*7. Как видно из ее значения *Х*7=87.5 усл. ед., трудовой ресурс израсходован не полностью, значит, он является недефицитным. Таким образом, трудовой ресурс можно уменьшить на 87.5 усл. ед.; это никак не повлияет на оптимальный план производства мебели. Если трудовой ресурс снизится более чем на 87.5 усл. ед. (т.е. составит менее 750 усл. ед.), то потребуется заново определять оптимальный план производства мебели.

Ценность ресурса – это увеличение значения целевой функции (прибыли) при увеличении запаса ресурса на единицу (или, соответственно, снижение целевой функции при уменьшении запаса ресурса на единицу).

Ценность обычных досок равна 4 ден. ед., ценность пропитанных досок равна нулю. Это означает, что увеличение запаса обычных досок на 1 метр приведет к увеличению прибыли фабрики на 4 ден. ед. Снижение этого запаса приведет к соответствующему снижению прибыли. Нулевое значение ценности пропитанных досок означает, что увеличение его запаса или его снижение (не более чем на 260 метров) не приведет к изменению прибыли, так как данный ресурс недефицитен. Нулевое значение ценности трудового ресурса означает, что увеличение его запаса или его снижение (не более чем на 87.5 усл. ед.) не приведет к изменению прибыли, так как данный ресурс недефицитен.

Также можно сделать вывод, что увеличивать запас обычных досок целесообразно только при условии, что его цена не будет превышать 4 ден. ед. за 1 метр, иначе затраты на их закупку превысят прибыль от их использования.

Общая характеристика ресурсов по значению их ценности приведена в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Характеристика ресурсов по значению их ценности

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Переменная | Название ресурса | Значение | Статус | Ценность |
| *Х5* | Обычные доски | 0 | Дефицитный | 4 |
| *Х6* | Пропитанные доски | 260 | Недефицитный | 0 |
| *Х7* | Трудовой ресурс | 87.5 | Недефицитный | 0 |

## Анализ на чувствительность к изменениям запаса ресурсов

Проанализируем, как влияют на оптимальный план производства **изменение размера запаса обычных досок**. Для анализа влияния таких изменений на оптимальное решение используются коэффициенты из столбца остаточной переменной, входящей в изменившееся ограничение.

Пусть максимально возможный запас пластмассы изменился на единиц, т.е. составляет не 1500, а единиц. Для определения нового оптимального решения при изменившемся запасе обычных досок используем коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (см. таблицу 4.4) из столбца остаточной переменной *Х*5, так как эта переменная входит в изменившееся ограничение. Новое оптимальное решение определяется следующим образом:

.

Определим диапазон изменений запаса пропитанных досок, при которых состав переменных в оптимальном базисе остается прежним (т.е. базис оптимального решения будет состоять из переменных *Х2, Х6, Х7, Х3*). Этот диапазон находится из условия неотрицательности всех переменных:

Решив эту систему неравенств, получим: . Это означает, что базис оптимального решения будет состоять из переменных *Х2, Х6, Х7, Х3,* если запас обычных досок будет составлять от 80 метров до 1675 метров. Иначе для определения оптимального решения потребуется решать задачу заново (с новым ограничением на поставку обычных досок).

Пусть, например, максимально возможный запас обычных досок составляет не 1500, а 1580 м, т.е. *d*=80. Найдем новое оптимальное решение:

Новое оптимальное решение оказывается следующим: *X*2=750; *X*6=220; *X*7=; *Х*3=10; E=. Это означает, что в новых условиях (при запасе обычных досок 1580 м) фабрике следует выпускать за неделю 750 стульев и 10 бюро. Неизрасходованный остаток пропитанных досок составит 220 м, а трудового ресурса 47.5 усл. ед. Прибыль составит ден. ед. (на 320 ден. ед. больше). Обычные доски будут израсходованы полностью (переменная *X*5 остается небазисной, т.е. равная нулю).

Проанализируем, как влияют на оптимальный план производства **изменение размера запаса пропитанных досок**.

Пусть максимально возможный запас пластмассы изменился на единиц, т.е. составляет не 1000, а единиц. Для определения нового оптимального решения при изменившемся запасе пропитанных досок используем коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (см. таблицу 4.5) из столбца остаточной переменной *Х*6, так как эта переменная входит в изменившееся ограничение. Новое оптимальное решение определяется следующим образом:

.

.

Определим диапазон изменений запаса пропитанных досок, при которых состав переменных в оптимальном базисе остается прежним (т.е. базис оптимального решения будет состоять из переменных *Х2, Х6, Х7, Х3*). Этот диапазон находится из условия неотрицательности всех переменных:

.

Решив эту систему неравенств, получим: . Это означает, что базис оптимального решения будет состоять из переменных *Х2, Х6, Х7, Х3*, если запас пропитанных досок будет составлять от 740 метров. Если запас этого ресурса составит менее 740 метров, то для определения оптимального решения потребуется решать задачу заново (с новым ограничением на поставку пропитанных досок).

Пусть, например, максимально возможный запас пропитанных досок составляет не 1000, а 1200 единиц, т.е. *d*=200. Найдем новое оптимальное решение:

.

.

Из этих уравнений видно, что изменения ограничения на запас пропитанных досок (если эти изменения не выходят за определенный диапазон) не приведут к каким-либо изменениям в решении задачи.

## Анализ на чувствительность к изменениям прибыли от реализации бюро

Проанализируем, как влияют на оптимальный план производства изменения величины прибыли от реализации одного из изделий, например, бюро.

Пусть прибыль от продажи одного бюро изменилась на *d* ден. ед., т.е. составляет не 17, а 17 + *d* ден. ед. Для анализа влияния этих изменений на оптимальное решение используются коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (см. таблицу 4.4) из строки переменной *Х*3, так как для этой переменной изменился коэффициент целевой функции. Новые значения коэффициентов E-строки при небазисных переменных (т.е. при переменных *Х1, Х4, Х5, Х8*) для окончательной симплекс-таблицы, а также новое оптимальное значение целевой функции определяются следующим образом:

.

.

Определим диапазон изменений прибыли от продажи одного стула, при котором остается оптимальным решение, найденное для исходной постановки задачи. Условием оптимальности решения является неотрцательность всех коэффициентов E-строки:

.

Решив эту систему неравенств, получим: . Это означает, что решение, найденной для исходной постановки задачи оптимально, если прибыль от продажи одного бюро не превысит 32 ден.ед. Если эта прибыль превысит 32 ден.ед., то для получения оптимального решения потребуется решить задачу заново, используя симплекс-метод. Новое оптимальное решение будет отличаться от прежнего решения не только значениями, но и составом переменных в оптимальном базисе. При этом прежнее решение уже не будет оптимальным, но останется допустимым, так оно удовлетворяет ограничениям задачи.

Пусть, например, прибыль от продажи одного бюро снизилась на 7 ден.ед., т.е. составляет не 17, а 10 ден.ед. (*d*=-7). Найдем новые значения коэффициентов E-строки при небазисных переменных для окончательной симплкс-таблицы и новое оптимальное значение целевой функции:

.

.

Видно, что коэффициенты E-строки остались неотрицательными. Это значит, что оптимальное решение не изменится: *X*1, , , , , , , . Таким образом, при снижении прибыли от продажи одного бюро до 10 ден.ед. заводу для получения максимальной прибыли следует выпускать 10 бюро. Для новых условий прибыль от продажи всех изделий при таких объемах составит 5780 ден.ед., которая является максимально возможной в этом случае.

# ПОСТРОЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДИФИКАЦИИ

Проанализировав результаты решения задачи оптимизации, можно выделить следующие недостатки в работе предприятия:

– четверть закупаемых пропитанных досок не используется;

– столы и шкафы не выпускаются.

Завод не использует весь имеющийся запас пропитанных досок из-за нехватки другого ресурса (обычных досок), так как для производства любого изделия используются оба ресурса. Найдем, на какую величину необходимо увеличить поставку обычных досок, чтобы использовать все ресурсы по возможности более полно. Это позволит также увеличить выпуск изделий и получить большую прибыль.

Предположим, например, что завод увеличил запас обычных досок до 2000 метров, а трудовой ресурс до 1000 усл. ед. Внесём соответствующее изменение в правую часть ограничения математической модели:

Решив задачу заново, используя MS Excel, получим следующее оптимальное решение:

*E* = 7850

.

Неизрасходованный остаток пропитанных досок снизился (с 260 до 10 метров). Увеличилось количество выпускаемых стульев с 710 до 960. Также следует заметить, что количество неиспользуемого трудового ресурса снизилось с 87.5 до 37.5 у.е. Таким образом, прибыль увеличилась с 5780 до 7850 ден. ед.

Рабочий лист с результатами оптимизации на основе модифицированной модели с использованием табличного процессора *Excel* приведен в Приложении Б.

Сравнительные характеристики двух планов работы предприятия (при базовом и новом варианте ограничений) приведена в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Сравнительная характеристика планов работы предприятия

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Показатели | Базовый вариант | Новый вариант |
| Количество выпускаемой мебели, шт  Стол  Стул  Бюро  Шкаф | 0  710  10  0 | 0  960  10  0 |
| Количество неизрасходованного материала, м  Обычные доски  Пропитанные доски | 0  260 | 0  10 |
| Остаток трудового ресурса, усл. ед. | 87.5 | 37.5 |
| Максимальная прибыль, ден.ед. | 5850 | 7850 |

Очевидно, что модифицированный план позволяет существенно улучшить показатели: обеспечивается полное использование ресурсов, увеличивается выпуск изделий и, соответственно, прибыль.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения курсового проекта разработан оптимальный план работы мебельной фабрики, выпускающей столы, стулья, шкафы и бюро, для получения максимальной прибыли при соблюдении всех ограничений.

Для получения максимальной прибыли предприятию следует выпускать 710 единиц стульев и ровно 10 единиц бюро. Максимальная прибыль при таком объеме производства мебели составит 5850 ден. ед. После выпуска этих изделий останется не использовано 260 метров обычных досок и 87.5 усл. ед. трудового ресурса не будут заняты в производстве мебели.

Проанализировав результаты решения задачи оптимизации, можно выделить следующие недостатки в работе мебельной фабрики: четверть закупаемых пропитанных досок не используется; столы и шкафы не выпускаются.

Данные недостатки можно устранить. Для этого была построена модифицированная модель, в которой были увеличены еженедельные поставки обычных досок с целью уменьшения количества неиспользованных ресурсов и увеличения прибыли фабрики. В результате увеличения запаса обычных досок до 2000 метров и трудового ресурса до 1000 у.е. получили новое оптимальное решение:

– остаток пропитанных досок уменьшился (с 260 м до 10 м);

– трудовой ресурс полностью расходуется;

– фабрика начала выпускать больше стульев (960 стульев);

– прибыль мебельной фабрики увеличилась (E=7850 ден. ед.).

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Краснопрошин, В. В. Исследование операций / В. В. Краснопришин, Н. А. Лепешинский. – Минск : БГУ, 2013. ‑ 192 с.

[2] Таха, Х. Введение в исследование операций / X. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

[3] Эддоус, М. Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд. – М.: Юнити, 1997. – 590 с.

[4] Мур, Дж.Х. Экономическое моделирование в *Microsoft Excel* / Дж.Х. Мур, Л.Р. Уэдерфорд. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 1024 с.

[5] Смородинский, С. С. – Системный анализ и исследование операций : оптимизация решений на основе методов и моделей математического программирования : учебно-методическое пособие / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Минск : БГУИР, 2010. – 192 с. : ил.

[6] Смородинский, С. С. – Системный анализ и исследование операций : сборник заданий и методических указания по курсовому проектированию для студентов специальности I-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» дневной и дистанционной форм обучения / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Минск. : БГУИР, 2006. – 74 с.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А (обязательное) Рабочий лист *Excel* с результатами решения задачи на основе базовой аналитической модели

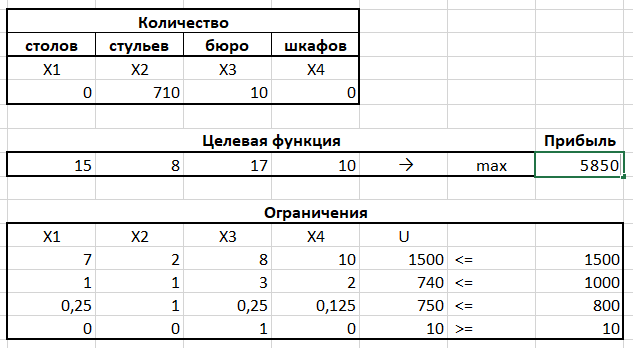
****

Рис А.1 – *Excel*-документ результатов поиска решения

# ПРИЛОЖЕНИЕ Б (обязательное) Рабочий лист *Excel* с результатами решения задачи на основе модифицированной аналитической модели

****

Рис Б.1 – *Excel*-документ результатов поиска решения

# ВЕДОМОСТЬ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Обозначение* | | | | | *Наименование* | *Дополнительные сведения* | | | | |
|  | | | | | *Текстовые документы* |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
| *БГУИР КП 1-53 01 02 01 010 ПЗ* | | | | | *Пояснительная записка* | *29 с.* | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  | | | | |  |  | | | | |
|  |  |  |  |  | *БГУИР КП 1-53 01 02 01 010 Д1* | | | | | |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| *Изм.* | *Л.* | *№ докум.* | *Подп.* | *Дата* | *Разработка оптимального плана работы мебельной фабрики*  *Ведомость курсового проекта* | *Лит* | | | *Лист* | *Листов* |
| *Разраб.* | | *Светляк* |  |  |  | *Т* |  | *29* | *29* |
| *Провер.* | | *Протченко* |  |  | *Кафедра ИТАС*  *гр. 020601* | | | | |
|  | |  |  |  |
|  | |  |  |  |
|  | |  |  |  |
|  | |  |  |  |